私立大学入試予想問題 (難問編)

注）　これは難関私立大学の入試予想問題である。

理系を想定しているため数 III も含んでいます。文系の人は第 1 問, 第 2 問, 第 4 問 (1)(2)(i) だけは解けますのでそこだけ解いてみてもよいでしょう。

予想問題でやっててよかった... と思えるような，クセのある問題を集めました。問題レベルはやや難しめになっています。

空欄には整数が入るとは限りません。

第 1 問　(配点 25)

6 人でテストを受けたところ，太郎君は 52 点を取り，偏差値は 46，順位は 4 位であった。このテストの最高点は 92 点の花子さんであった。平均点は 60 点で中央値は 58 である。

問題文中の数字はすべて整数で割り切れているものとし，6 人の点数はすべて整数であることに注意して以下の空欄を埋めよ。必要ならば以下の関係式を用いてよい。

$$(X\text{ さんの偏差値}) = \frac{(X\text{ さんの得点}) - (\text{平均点})}{(\text{標準偏差})} \times 10 + 50$$

(1) 花子さんの偏差値は $\boxed{\text{あ}}$ である。

(2) 6 人のテストの点数を高い順に並べると

92, $\boxed{\text{い}}$, $\boxed{\text{う}}$,52, $\boxed{\text{え}}$, $\boxed{\text{お}}$ である。

(3) 太郎君がもっと勉強し，他の 5 人の点数は同じまま太郎君だけの点数が上がるとき太郎君が $\boxed{\text{か}}$ 点取ると太郎君の偏差値は 60 になる。

第2問　(配点 25)

3 点 O,A,B を

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 4, |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 5, \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 12$$

を満たすようにとる。また空間上に点 C をとり 4 つの面がすべて合同になるような四面体 OABC を作る。

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = \boxed{\text{き}}, \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \boxed{\text{く}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \boxed{\text{け}}$ である。

(2) 三角形 ABC の面積は $\boxed{\text{こ}}$, 四面体 OABC の体積は $\boxed{\text{さ}}$ である。

となる。

(3) OC の中点を P,AC を 1 : 2 に内分する点を Q とし，辺 OB 上に点 R,辺 AB 上に点 S を 3 つの線分の長さの和

PR+RS+SQ が最小となるようにとる。このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \boxed{\text{し}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OS}} = \boxed{\text{す}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \boxed{\text{せ}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

である。

第3問　(配点 25)

a を実数の定数とし，3 次方程式

$$z^3 - 3z^2 + az + 4 = 0$$

の解を $z = \alpha, \beta, \gamma$ とし，複素数平面上で α, β, γ を表す点をそれぞれ A,B,C とする。

(1) 三角形 ABC が成立しないような a の範囲は $\boxed{\text{そ}}$ である。

(2) 三角形 ABC が正三角形になるとき，$t = \dfrac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ とおくと t は t^2 の係数が 1 である方程式

$$\boxed{\text{た}} = 0$$

を満たす。よって三角形 ABC が正三角形となるような a は $\boxed{\text{ち}}$ である。

(3) $a = \dfrac{25}{4}$ とし，複素数 w は $|w| = 1$ を満たしながら動き，複素数 w' は三角形 ABC の周上 (頂点も含む) を動く。

このとき複素数平面上で ww' の取りうる領域の面積は $\boxed{\text{つ}}$ である。

第４問　(配点 25)

関数 $T_n(x)$ を以下のように定める。

$$T_1(x) = 1, T_2(x) = 2x$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

(1) すべての自然数 n に対して次の関係式が成り立つことを証明せよ。

$$\sin(n\theta) = T_n(\cos\theta)\sin\theta$$

(2) 次の値を求めよ。

(i) $T_n\left(-\frac{1}{2}\right)$　(ii) $T_n{}'\left(-\frac{1}{2}\right)$　(iii) $\displaystyle\int_0^1 T_n(x)dx$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n T_n\left(-\frac{1}{2}\right)$ は収束することを示し、その値を求めよ。

(問題は以上で終わりである)