私立大学入試予想問題 (標準編)

注）　これは標準的な私立大学の入試予想問題である。

文系でも対応できるように数 IIB までの範囲から出題している。

本当の意味で標準的なものはすでに演習済みで予想問題として的中させなくても解けることを前提としています。つまり予想問題でやっててよかった... と思えるレベルの問題を集めました。標準レベルとされている大学がもしクセのある難問を出してきたら... ということを想定しているため標準編の割にはやや難しめになっています。

空欄には整数が入るとは限りません。

第 1 問　(配点 25)

(1) x^{50} を x^2+x+1 で割った商を $P(x)$, 余りを $R(x)$ とする。$R(x) = \boxed{\text{ア}}$ であり，$P(x)$ のそれぞれの係数の和は $\boxed{\text{イ}}$ である。

(2) 赤球 5 個，白球 n 個入った袋の中から同時に 3 個の球を取り出すとき，赤球がちょうど 1 個含まれる確率を p_n とすると

$$p_n = \frac{\boxed{\text{ウ}}\, n(n-1)}{(n+\boxed{\text{エ}})(n+\boxed{\text{エ}}-1)(n+\boxed{\text{エ}}-2)}$$

である。また p_n が最大となるのは $n = \boxed{\text{オ}}$ または $n = \boxed{\text{カ}}$ のときである。

(3) $n^2 - m^2 = 15m$ を満たす自然数 (n, m) の組は全部で $\boxed{\text{キ}}$ 個ある。

第2問　(配点 25)

(1) 最高次の係数が1であり，$x=\alpha$ で極大値をもち，$x=\beta$ で極小値をもつ3次関数を $f(x)$ とする。このとき，

$$f(\alpha)-f(\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}-f'(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}\boxed{\text{ク}}(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{(\beta-\alpha)^{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}$$

である。

以下では $g(x)=x^3+x^2-ax+3$ とし，$y=|g(x)|$ のグラフが異なる2点 $P(\alpha,|g(\alpha)|),Q(\beta,|g(\beta)|)(\alpha<\beta)$ で極大値をもつとする。

(2) このような a の範囲は $a>\boxed{\text{サ}}$ である。

(3) P,Q から x 軸にひいた垂線の足をそれぞれ S,R とする。四角形 PQRS の面積が $\dfrac{2^6\cdot 7^2}{3^4}$ となるような a の値は $a=\boxed{\text{シ}}$ である。

(4) a は (3) で定めた値とする。このとき $y=|g(x)|$ に異なる2点で接する直線はただ1つ存在する。その直線の方程式は $y=\boxed{\text{ス}}$ である。

第3問　(配点 25)

面積が1の三角形ABCがある。AからBCにおろした垂線の足をP,BからCAにおろした垂線の足をQとする。

また，APとBQの交点をHとし，CHとABの交点をRとする。このとき

$$3\overrightarrow{\mathrm{HA}}+4\overrightarrow{\mathrm{HB}}+5\overrightarrow{\mathrm{HC}}=\overrightarrow{0}$$

が成り立つという。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\boxed{\text{セ}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\boxed{\text{ソ}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

であり，また，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\boxed{\text{タ}}$, $\triangle\mathrm{AHB}=\boxed{\text{チ}}$ である。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\boxed{\text{ツ}}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=\boxed{\text{テ}}|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=\boxed{\text{ト}}$ である。

3点A,P,Qを通る円の中心を O_1,3点B,P,Rを通る円の中心を O_2,3点C,P,Qを通る円の中心を O_3 とする。

(3) $\overrightarrow{AO_1}=\boxed{\text{ナ}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\boxed{\text{ニ}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ である。

(4) 三角形 $O_1O_2O_3$ の面積は $\boxed{\text{ヌ}}$ である。

第４問　(配点 25)

p を奇数の素数とする。

(1)　$k({}_pC_k) = \dfrac{p!}{(\boxed{\text{ネ}})!(\boxed{\text{ノ}})!} = p({}_{\boxed{\text{ハ}}}C_{\boxed{\text{ヒ}}}) \cdots ①$ である。

空欄を埋めよ。また次の [**命題**] を①を用いて証明せよ。

[**命題**] $1 \leq k \leq p-1$ に対し，${}_pC_k$ は p の倍数である。

(2) x, y を整数とするとき次の関係式が成り立つ。

$$ {}_xC_y + {}_xC_{y+1} = {}_{\boxed{\text{フ}}}C_{\boxed{\text{ヘ}}} \cdots ② $$

② より ${}_{p+1}C_k(2 \leq k \leq p-1)$ を p で割った余りは $\boxed{\text{ホ}}$ である。

同様に繰り返すと

${}_{p+s}C_k(0 \leq s \leq \boxed{\text{マ}}, \boxed{\text{ミ}} \leq k \leq \boxed{\text{ム}})$ を p で割った余りはすべて $\boxed{\text{ホ}}$ である。

ただし $\boxed{\text{マ}}, \boxed{\text{ミ}}, \boxed{\text{ム}}$ は条件に合うものの中から最適 (最も広範囲のもの) を選べ。

$\boxed{\text{マ}}$ ：① $p-2$　② $p-1$　③ p　④ $p+1$　⑤ $p+2$

$\boxed{\text{ミ}}\ \boxed{\text{ム}}$ ：① 1　② $s-1$　③ s　④ $s+1$　⑤ $p-s-1$

⑥ $p-s$　⑦ $p-s+1$　⑧ $p-1$　⑨ p　⑩ $p+1$　⑪ $p+s-1$

このことから

${}_{p+k}C_k(1 \leq k \leq p-1)$ を p で割った余りは $\boxed{\text{メ}}$,

${}_{p+k+1}C_k(1 \leq k \leq p-2)$ を p で割った余りは $\boxed{\text{モ}}$ となる。

(3) ②を用いて ${}_{p-1}C_{2k}(0 \leq k \leq \dfrac{p-1}{2})$ を p で割った余りはすべて 1 であることを証明せよ。

(問題は以上で終わりである)