

線形代数学 (1 年後期) 模擬試験

注) 空欄には整数 (選択肢の場合は選択肢の番号の整数) が入る。ただし 1 文字につき 1 ケタとは限らない。

第 1 問 (配点 50)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \text{ とする。}$$

(1) A の固有多項式は $x^3 - \boxed{\text{ア}}x^2 + \boxed{\text{イ}}x - \boxed{\text{ウ}}$ であり, 固有値は $\boxed{\text{エ}}, \boxed{\text{オ}}$ である。ただし $\boxed{\text{エ}} < \boxed{\text{オ}}$ とする。

(2) 固有値 $\boxed{\text{エ}}$ に対する固有ベクトルは $(1, \boxed{\text{カ}}, 0)$ と $(0, \boxed{\text{キ}}, 1)$ である。また固有値 $\boxed{\text{オ}}$ に対する固有ベクトルは $(\boxed{\text{ク}}, 1, \boxed{\text{ケ}})$ である。

(3) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{\text{ク}} \\ \boxed{\text{カ}} & \boxed{\text{キ}} & 1 \\ 0 & 1 & \boxed{\text{ケ}} \end{pmatrix}$ とおく。 P^{-1} を計算せよ。解答は下の文字が入っている部分の成分だけ書けばよい。

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{コ}} & \boxed{\text{サ}} & * \\ * & * & * \\ * & \boxed{\text{シ}} & \boxed{\text{ス}} \end{pmatrix}$$

(4) $P^{-1}AP = D$ とおく。 D を計算せよ。解答は下の文字が入っている部分の成分だけ書けばよい。

$$D = \begin{pmatrix} \boxed{\text{セ}} & \boxed{\text{ソ}} & \boxed{\text{タ}} \\ * & \boxed{\text{チ}} & * \\ * & * & \boxed{\text{ツ}} \end{pmatrix}$$

- (5) A^n を計算せよ。解答は下の文字が入っている部分の成分だけ書けばよい。

$$A^n = \begin{pmatrix} * & \boxed{\text{テ}} - \boxed{\text{ト}} \cdot \boxed{\text{ナ}}^n & * \\ * & * & \boxed{\text{ニ}} \\ * & * & \boxed{\text{又}} \end{pmatrix}$$

第2問 (配点 20)

- (1) a を正の定数とする。

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & a & 5 \\ 0 & 5 & 0 & a \\ a & 5 & -1 & 2 \\ 0 & a & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

とする。2が A の固有値になるように定数 a を定めると $a = \boxed{\text{ネ}}$ であり、そのとき A を対角化した行列は

$$\begin{pmatrix} \boxed{\text{ノ}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\text{ハ}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{ヒ}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\text{フ}} \end{pmatrix}$$

となる。(ただし $\boxed{\text{ノ}} \leq \boxed{\text{ハ}} \leq \boxed{\text{ヒ}} \leq \boxed{\text{フ}}$)

- (2)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & a \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

とする。 A が対角化不可能であるような a の値は $a = \boxed{\text{ヘ}}$ または $a = \boxed{\text{ホ}}$ である。ただし解答の順序は問わない。

第3問 (配点 30)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

とする。

(1) A の固有多項式は $x^3 - \boxed{\text{マ}}x^2 + \boxed{\text{ミ}}x - \boxed{\text{ム}}$ である。

(2) A を直交行列 P で対角化すると

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \boxed{\text{メ}} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\text{モ}} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{ヤ}} \end{pmatrix}$$

である。ただし $\boxed{\text{メ}} \leq \boxed{\text{モ}} \leq \boxed{\text{ヤ}}$ とする。さらにこのときの直交行列 P とその逆行列 P^{-1} も計算せよ。 P と P^{-1} については下の文字が入った空欄部分のみを以下の選択肢の中から選べばよい。

(注) 選択肢はすべて 0 以上の値である。つまり文字の入った空欄部分が正または 0 となるように符号を定める必要があります。

$$P = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ユ}} & \boxed{\text{ヨ}} & \boxed{\text{ラ}} \\ \boxed{\text{リ}} & \boxed{\text{ル}} & * \\ * & * & * \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{レ}} & \boxed{\text{ロ}} & \boxed{\text{ワ}} \\ \boxed{\text{ヲ}} & \boxed{\text{ン}} & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

① 1

② 2

③ 0

④ $\frac{1}{2}$

⑤ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

⑥ $\sqrt{2}$

⑦ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

⑧ $\frac{1}{\sqrt{5}}$

⑨ $\frac{2}{\sqrt{5}}$

(問題は以上で終わりである)