微分積分学 (1 年後期)　模擬試験

注)　空欄には整数（選択肢の場合は選択肢の番号の整数）が入る。ただし 1 文字につき 1 ケタとは限らない。

第 1 問　(配点 20)

(1) 2 変数関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^n y}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0) \text{ のとき}) \\ 0 & ((x,y) = (0,0) \text{ のとき}) \end{cases}$$

について考える。$n=1$ のとき $f(x,y)$ は原点で連続で $\boxed{\text{ア}}$。また，$n=2$ のとき $f(x,y)$ は原点で全微分可能で $\boxed{\text{イ}}$。

① ある　　② ない

(2) $f(x,y)$ は極座標変換 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ で変換すると r のみの関数 $g(r)$ になるとする。このとき

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{dg}{dr} \times \boxed{\text{ウ}}$$

と表される。

① $\sin\theta$　② $-\sin\theta$　③ $\cos\theta$　④ $r\sin\theta$
⑤ $-r\sin\theta$　⑥ $r\cos\theta$　⑦ r　⑧ 1

(3) e^{2x+6y} のマクローリン展開は

$$\boxed{\text{エ}} + \boxed{\text{オ}}x + \boxed{\text{カ}}y + \boxed{\text{キ}}x^2 + \boxed{\text{ク}}xy + \boxed{\text{ケ}}y^2 + R_3$$

である。ただし R_3 は剰余項である。また，さらに展開を続けると x^3y^4 の係数は $\boxed{\text{コ}}$ となる。

第2問　(配点 30)

$$f(x,y) = x^3 - 24xy + 8y^3$$

とする。

(1) 極値の候補 (停留点) は原点と ($\boxed{サ}$, $\boxed{シ}$) である。原点でのヘッセ行列は $\begin{pmatrix} \frac{\boxed{ス}}{\boxed{ソ}} & \frac{\boxed{セ}}{\boxed{タ}} \end{pmatrix}$ であり，ヘッシアンが $\boxed{チ}$ である。原点は $\boxed{ツ}$。また点 ($\boxed{サ}$, $\boxed{シ}$) はヘッシアンが $\boxed{テ}$ であり，$\boxed{ト}$。

＜ $\boxed{チ}$, $\boxed{テ}$ の選択肢 ＞

① 正　　② 0　　③ 負

＜ $\boxed{ツ}$, $\boxed{ト}$ の選択肢 ＞

① 極大である

② 極小である

③ 極大でも極小でもない

④ 極値であるかどうかは判定できない

(2) 実数 x, y が $x^2 - 2xy + 4y^2 = 1$ を満たしながら動くときの $f(x,y)$ の最大・最小を求めたい。ラグランジュの未定乗数法を用いると

$$(x,y) = \left(\frac{\boxed{ナ} \pm \sqrt{\boxed{ニ}}}{\boxed{ヌ}}, \frac{\boxed{ネ} \mp \sqrt{\boxed{ノ}}}{\boxed{ハ}} \right)$$ (複号同順) のとき最大値をとり，

$$(x,y) = \left(\boxed{ヒ}, \frac{\boxed{フ}}{\boxed{ヘ}} \right)$$ のとき最小値をとる。

(3) (1)(2) より実数 x, y が $x^2 - 2xy + 4y^2 \leq 1$ を満たしながら動くときの $f(x,y)$ の最小値は $\boxed{ホ}$ である。

第3問　(配点 40)

(1) $\displaystyle\int_1^9 \int_1^{y^2} \frac{y}{x} dxdy = \boxed{マ}(\log \boxed{ミ}) - \boxed{ム}$

(2) $\displaystyle\int\int_D 48\sin(x+y)dxdy = \boxed{メ}\sqrt{\boxed{モ}}$

ただし $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x < y < \frac{2}{3}\pi\}$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \int_{\sqrt{y}}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(\pi x)}{x} dxdy = \boxed{ヤ}$

＜$\boxed{ヤ}$の選択肢＞

① $\dfrac{1}{\pi}$　② $\dfrac{1}{\pi^2}$

③ $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2\pi}$　④ $\dfrac{4\sqrt{2}-\sqrt{2}\pi}{8\pi^2}$

(4) $\displaystyle\int\int_D e^{-2\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = \frac{\pi}{\boxed{ユ}}$

ただし $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x < y\}$

(5) $\displaystyle\int\int_D \frac{\sqrt{1-(x+y)^2}}{1+(x-y)^2} dxdy = \frac{\pi^2}{\boxed{ヨ}}$

ただし $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x+y \leq 1, 0 \leq x-y \leq 1\}$

第4問　(配点 10)

不等式 $x^2 + 4y^2 \leq z \leq 2x$ で表される領域の体積は $\dfrac{\pi}{\boxed{ラ}}$ である。

(問題は以上で終わりである)