数 III 積分　章末テスト

注）　空欄には整数（選択肢の場合は選択肢の番号の整数）が入る。ただし 1 文字につき 1 ケタとは限らない。

第 1 問　(配点 20)

(1)　次の中で計算結果が 0 になるものをすべて選べ。 $\boxed{\text{ア}}$

① $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^2\cos^2(x^3)dx$　② $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^4 dx$　③ $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^2 dx$

④ $\displaystyle\int_{-2}^{2} 1dx$　⑤ $\displaystyle\int_{-2}^{2} 2x^3\cos(x^3)dx$　⑥ $\displaystyle\int_{-2}^{2} 2x^2\cos(x^3)dx$

⑦ $\displaystyle\int_{-2}^{2} 2x\cos(x^3)dx$　⑧ $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^3 dx$　⑨ $\displaystyle\int_{-2}^{2} xdx$

(2)

$$\int_{-2}^{2} |x\cos(x^3)+ax^2+bx+c|^2 dx$$

は $a=\boxed{\text{イ}}, b=-\dfrac{\sin\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}, c=\boxed{\text{オ}}$ のとき最小値

$$\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}+\frac{\sin\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}-\frac{\sin^2\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

をとる。

第 2 問　(配点 20)

$0 \leq x \leq \dfrac{3}{2}\pi$ の範囲で $y = |\sin 2x|$ と $y = \cos x$ で囲まれる 2 つの領域を D とする。

(1)　D の面積は $\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$ である。

(2)　D を x 軸周りに 1 回転させてできる回転体の体積は

$$\frac{\pi^2}{\boxed{セ}} + \frac{\boxed{ソ}\sqrt{\boxed{タ}}}{\boxed{チ}}\pi$$ である。

第 3 問　(配点 20)

2 階微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ は次の条件を満たす。

$$f(x) = 3x^2 - 2x - 1 + \int_0^x g(x-t)\sin t dt$$

$$f''(x) = (x+5)e^x$$

このとき

$f(x) = (x + \boxed{ツ})e^x - \boxed{テ}x - \boxed{ト}$ であり,

$g(x) = \boxed{ナ}(x + \boxed{ニ})e^x - \boxed{ヌ}x^2 - \boxed{ネ}x - \boxed{ノ}$ である。

第４問　(配点 20)

$I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n-2}}{1+x^2}dx$ とおく。

(1)　$I_1 = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{ハ}}}$ である。

(2)　$I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{\boxed{\text{ヒ}}\,n - \boxed{\text{フ}}}$ である。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n = \boxed{\text{ヘ}}$ である。

(4)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n-1)} = \frac{\pi}{\boxed{\text{ホ}}}$ である。

(5)　$a_n = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{ホ}}} - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k-3)(4k-1)}$ とする。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} na_n = \frac{1}{\boxed{\text{マ}}}$ である。

第5問　(配点 20)

$y=\dfrac{1}{3}x^2(0\leq x\leq 3)$ を y 軸周りに 1 回転させてできる容器がある。この容器を傾けずに水が最大まで入るようにする。

(1)　この容器に水を入れるとき水は $\dfrac{\boxed{ミ}}{\boxed{ム}}\pi$ 入る。

(2)　この容器に最大まで水が入った状態から半径 3 の鉄球をそっと沈める。このとき鉄球の中心は原点から $\dfrac{\boxed{メ}}{\boxed{モ}}$ 離れた位置に来るため, $\dfrac{\boxed{ヤ}}{\boxed{ユ}}\pi$ の水がこぼれる。

(3)　この容器を 45 度傾けると水がこぼれる。残った水の体積を求めたい。容器の上部分の領域は $y\geq\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{1}{3}z^2$ とかける。また，こぼれたあとの水が残っている部分は $y\leq x$ とかける。この共通部分の領域が残った水の部分である。平面 $x=t$ で切断したとき、水が残っている部分の面積は

$$\frac{\boxed{ヨ}}{\boxed{ラ}}(\boxed{リ}\,t-t^2)^{\frac{\boxed{ル}}{\boxed{レ}}}$$

であるから残った水の体積は $\dfrac{\boxed{ロ}}{\boxed{ワ}}\pi$ である。

(問題は以上で終わりである)